数理解析研究所講究録 1248 巻 2002 年 65-68

ON BUBBLY CONTINUA

島根大学 総合理工学部 横井 勝弥 (Katsuya Yokoi)

§1 Bubbles

W. Kuperberg (1973) は、 Čech homology を使って n-bubble の概念を導入した。それは、実際は P. S. Alexandroff (1932) による Cantor n-manifold のことである (ただし、現在の意味とは少し異なる)。ここでの目標は、Čech cohomology を使ってこの bubble を再定式化し、いくつかの応用を与えることである。

Definition 1.1. A compactum X is called an (n, G)-bubble if the following conditions are satisfied:

(1) $\check{H}^n(X; G) \neq 0$, and
(2) $\check{H}^n(A; G) = 0$ for every proper closed subset A of X.

定義から直ちにわかるように (n, G)-bubble であれば、G 係数コホモロジー次元は n であることに注意する。

Bubble に関していくつかの例を挙げよう。

Example 1.2.

(1) A connected closed n-manifold is a typical example of an $(n, \mathbb{Z})$-bubble. We note that a connected non-orientable n-manifold is not an $(n, \mathbb{Q})$-bubble.
(2) The Warszawa circle is a $(1, \mathbb{Z})$-bubble.
(3) An n-dimensional solenoid is an $(n, \mathbb{Z})$-bubble.
(4) Examples of Dranishnikov [6] and Dydak-Walsh [9] show the existence of an *infinite dimensional* $(n, \mathbb{Z})$-bubble.

Example 1.3 [1]. Let G be a Poincaré duality group of dimension $n \geq 2$ over a PID R such that the image of its orientation character is finite. If Z is a boundary of G, then Z is an $(n-1, R)$-bubble, in fact, the space is a homology $(n-1)$-sphere over R.

The author was partially supported by the Ministry of Education, Science, Sports and Culture under Grant-in-Aid for Encouragement of Young Scientists, (No.13740041, 2001-2002).

Example 1.4 [10]. Let X be a $\mathcal{Z}$-compactification of a contractible open n-manifold M, $n \geq 2$. Then $Z = X \setminus M$ is an $(n-1, G)$-bubble, where a $\mathcal{Z}$-compactification of M means a compact ANR X containing M as an open subset and having the property that $X \setminus M$ is a Z-set in X.

上の例から群の境界は、bubble となると思われるかもしれないが、Dranishnikov により境界が Menger continuum となるコクセター群が構成されているので、一般にそうなるとは限らない。

次に、既存の概念との関係について考察してみよう。児玉先生により次が定義された：Cantor n-manifold with respect to an abelian group G であるとは、次を満たすコンパクト距離空間のことをいう；cohomological dimension n with respect to G, and if A is a closed set of X with $\text{c-dim}_G A \leq n-2$, then $X \setminus A$ is connected

Mayer-Vietoris exact sequnece を使うことにより、(n, G)-bubble は Cantor n-manifold with respect to G となる。Cantor n-manifold with respect to G に関しては次の命題が成り立つ：

Proposition. *Let $X = X_1 \cup X_2$ be a compactum such that each X_i is a Cantor n-manifold with respect to G. If $\text{c-dim}_G X_1 \cap X_2 \geq n-1$, then X is also a Cantor n-manifold with respect to G.*

したがって、manifolds の連結和などはまだ依然として Cantor manifold となっているが、bubble ではなくなる。また、一般に n-dimensional compactum が Cantor n-manifold を含んでいるという事は、よく知られた事実であるが、bubble を常に含んでいるとは限らない。今のところ部分集合としての存在性について保証できる空間というのは、次の性質をもつ空間である。

Theorem 1.5. *Let X be a compactum with $\text{c-dim}_R X \leq n$ and $\check{H}^n(X, R) \neq 0$, where R is principal ideal domain. If there exists a map $f\colon X \to P$ to a polyhedron such that the induced homomorphism $f^*\colon \check{H}^n(P, R) \to \check{H}^n(X, R)$ is an epimorphism, then X contains an (n, R)-bubble.*

Corollary 1.6. *Let X be a compactum with $\text{c-dim}_R X \leq n$ and $\check{H}^n(X, R) \neq 0$, where R is principal ideal domain. If X is an ANR, then it contains an (n, R)-bubble.*

Bubble は次元論的立場からみると局所的にはとても強固なものに思えるが次のような病的な例が存在する。

Example 1.7 (Pontryagin's example in [11; p. 331]**).** For every prime p, there exists a 2-bubble X_p such that $\dim X_p \times X_q \leq 3$ for $p \neq q$.

また、Dranishnikov の例を再構成することにより次を得る：

Example 1.8. For every prime p, there exists a 4-bubble N_p in a 4-dimensional ANR such that $\dim N_p \times N_q \leq 7$ for $p \neq q$.

§2 Bubbles and homogeneity

ANR と homogeneity に関して次の Bing-Borsuk による予想はよく知られている：

Conjecture [2]. *An n-dimensional homogeneous ANR continuum is an n-manifold.*

この予想について Bing-Borsuk は $n \leq 2$ について肯定的に示している。また、$n = 3$ については Jakobsche により Bing-Borsuk 予想が正しいならば Poincaré 予想は正しいことを示している為、解決する道のりは険しいと思われる。この予想に関して、次元論的な立場からの研究が、Lysko、Seidel、Krupski 等によりなされている。以下 X を n-dimensional homogeneous ANR continuum とすると、次の性質を持つことが知られている。

(1) Let Z be a closed set in X. Then $\dim Z = n$ if and only if $\mathrm{Int}_X Z \neq \emptyset$.
(2) Let U, V be subsets of X with $U \cong V$. Then U is open in X if and only if V is open in X.
(3) X is an n-dimensional Cantor manifold.

(3) に関してこのような空間は、実はもっと強固な構造を持つことがわかる：

Theorem. *A homogeneous ANR continuum X with* c-$\dim_R X = n$ *and a non-trivial n-dimensional cohomology group in R is an (n, R)-bubble, where R is a PID and $n \geq 1$. In particular, in the case $R = \mathbb{Z}$, such a space is an n-bubble.*

また、 Bing-Borsuk は次の問題も提出している：

Problem. *Let X be an n-dimensional homogeneous ANR continuum. Is it true that:*

(1) *X is cyclic in dimension n,*
(2) *no compact subset of X, acyclic in dimension $n-1$, separates X?*

この問題について上記の定理により次の部分解が得られる：

Corollary. *Let X be an n-dimensional homogeneous ANR continuum which is cyclic in dimension n. Then no compact subset of X, acyclic in dimension $n-1$, separates X.*

最後に、W. Kuperberg によるとても素朴な問題を挙げておこう。

Problem. *Let X be an $(n+1)$-dimensional compactum. Then does X contain an n-bubble?*

REFERENCES

1. M. Bestvina, *Local homology properties of boundaries of groups*, Michigan Math. J. **43** (1996), 123–139.
2. R. H. Bing and K. Borsuk, *Some remarks concerning topologically homogeneous spaces*, Ann. of Math. **81** (1965), 100–111.
3. K. Borsuk, *Zur Dimensionstheorie der lokal zusammenziehbraren Räume*, Math. Ann. **109** (1934), 376–380.
4. M. W. Davis, *Nonpositive curvature and reflection groups*, Handbook of geometric topology (to appear).
5. A. N. Dranishnikov, *Homological dimension theory*, Russian Math. Surveys **43(4)** (1988), 11–63.
6. ———, *On a problem of P. S. Alexandroff*, Mat. Sbornik **135 (4)** (1988), 551–557.
7. ———, *On boundaries of Coxeter groups*, preprint.
8. J. Dydak, *Cohomological Dimension Theory*, Handbook of Geometric Topology, 1997 (to appear).
9. ——— and J. J. Walsh, *Infinite dimensional compacta having cohomological dimension two: an application of the Sullivan conjecture*, Topology **32** (1993), 93–104.
10. ———, *Cohomological dimension of remainders of compactifications of contractible manifolds*, preprint.
11. ———, *Complexes that arise in cohomological dimension theory: A unified approach*, J. London Math. Soc. (2) **48** (1993), 329–347.
12. E. G. Effros, *Transformation groups and C^* algebras*, Ann. of Math. **81** (1965), 38–55.
13. T. Hosaka and K. Yokoi, *The boundary and the virtual cohomological dimension of Coxeter groups*, Houston J. of Math. (to appear).
14. W. Hurewicz and H. Wallman, *Dimension theory*, Princeton University Press, Princeton, 1941.
15. U. H. Karimov and D. Repovš, *On $\check{H}^n$-bubbles in n-dimensional compacta*, Colloq. Math. **75** (1998), 39–51.
16. Y. Kodama, *Cohomological dimension theory*, Appendix to K. Nagami, Dimension theory, Academic Press, New York, 1970.
17. P. Krupski, *Homogeneity and Cantor manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **109** (1990), 1135–1142.
18. W. Kuperberg, *A cyclic two-dimensional compactum containing no irreducibly cyclic two-dimensional subcompactum*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **182** (1968), 1098–1100.
19. ———, *On certain homological properties of finite-dimensional compacta. Carries, minimal carriers and bubbles*, Fund. Math. **83** (1973), 7–23.
20. J. M. Łysko, *Some theorems concerning finite dimensional homogeneous ANR-spaces*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **XXIV** (1976), 491–496.
21. H. P. Seidel, *Locally homogeneous ANR-spaces*, Arch. Math. **44** (1985), 79–81.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, SHIMANE UNIVERSITY, MATSUE, 690-8504, JAPAN